

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 010

Berekening van de viervoudige integraal

$$\int_0^b \int_0^b \int_0^a \int_0^a \frac{dx_1 dx_2 dy_1 dy_2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + h^2}^{\frac{2}{3}} \cdot$$

Dr. W. Peremans en H.J.A. Duparc



Berekening van de viervoudige integraal

$$\int_0^b \int_0^a \int_0^b \int_0^a \frac{dx_1 dx_2 dy_1 dy_2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + h^2}.$$

Dr W. Peremans en H. J. A. Duparc.

Door de transformatie $x_1 - x_2 = x$; $x_1 + x_2 = X$; $y_1 - y_2 = y$; $y_1 + y_2 = Y$ gaat de te berekenen integraal over in

$$4 \int_0^a \int_0^b \frac{(a-x)(b-y) dx dy}{(x^2 + y^2 + h^2)^3}.$$

Deze integraal splitsen we in 4 integralen, welke ontstaan door de teller in zijn 4 bestanddelen te splitsen.

Beschouw allereerst de integraal

$$J_1 = 4ab \int_0^a \int_0^b \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + h^2)^3}.$$

Door transformatie op poolcoördinaten gaat deze over in

$$4ab \int \int \frac{r dr d\varphi}{(r^2 + h^2)^3},$$

te nemen over de rechthoek met hoekpunten $(0,0)$; $(a,0)$; (a,b) ; $(0,b)$, welke wij verdelen in twee driehoekige gebieden door de rechte $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$. Dan vindt men dat J_1 gelijk is aan de som van twee uitdrukkingen, waarvan de eerste gelijk is aan

$$4ab \int_0^{\frac{b}{a}} d\varphi \int_0^{a \sec \varphi} \frac{r dr}{(r^2 + h^2)^3} = 4ab \int_0^{\frac{b}{a}} d\varphi \left(\frac{-\frac{1}{2}}{(r^2 + h^2)^2} \right) \Big|_0^{a \sec \varphi} =$$

$$-\frac{ab}{h^4} b \operatorname{tg} \frac{b}{a} - ab \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{d\varphi}{(h^2 + a^2 \sec^2 \varphi)^2}$$

en de tweede uit de eerste volgt door a en b te verwisselen. De laatste in-te graal gaat door de substitutie $\operatorname{tg} \varphi = t$ over in

$$\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{dt}{(t^2 + 1)(a^2 t^2 + a^2 + h^2)^2} = \frac{1}{a^4} \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{dt}{(t^2 + 1)(t^2 + \alpha^2)^2} \quad \text{met } \alpha^2 = 1 + \frac{h^2}{a^2}.$$

$$\text{Wegens } \frac{1}{(t^2 + 1)(t^2 + \alpha^2)^2} = \frac{A}{t^2 + 1} + \frac{B}{t^2 + \alpha^2} + \frac{C}{(t^2 + \alpha^2)^2}$$

$$\text{met } A = -B = (1 - \alpha^2)^{-2}; \quad C = (1 - \alpha^2)^{-1}$$

vindt men

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)(t^2 + \alpha^2)^2} = (1 - \alpha^2)^{-2} b \operatorname{tg} t + \frac{1 + 3\alpha^2}{2\alpha^3(1 - \alpha^2)^2} b \operatorname{tg} \frac{t}{\alpha} + \frac{t}{2\alpha^2(t^2 + \alpha^2)(1 - \alpha^2)}$$

zodat men tenslotte voor de eerste in J_1 optredende uitdrukking vindt

$$\frac{ab}{h^4} \operatorname{tg} \frac{b}{a} - \frac{ab}{a^4} \left(\frac{a^4}{h^4} \operatorname{tg} \frac{b}{a} - \frac{a^5(2a^2+3h^2)}{2h^4(a^2+h^2)^{3/2}} \operatorname{tg} \frac{b}{\sqrt{a^2+h^2}} + \right. \\ \left. - \frac{a^5b}{2h^2(a^2+h^2)(a^2+b^2+h^2)} \right)$$

waarna men krijgt

$$\mathcal{J}_1 = \frac{ab\pi}{2h^4} - \frac{ab}{h^4} \operatorname{tg} \frac{b}{a} - \frac{ab}{h^4} \operatorname{tg} \frac{a}{b} + \frac{a^2b(2a^2+3h^2)}{2h^4(a^2+h^2)^{3/2}} \operatorname{tg} \frac{b}{\sqrt{a^2+h^2}} + \\ + \frac{ab^2(2b^2+3h^2)}{2h^4(b^2+h^2)^{3/2}} \operatorname{tg} \frac{a}{\sqrt{b^2+h^2}} + \frac{a^2b^2(a^2+b^2+2h^2)}{2h^2(a^2+h^2)(b^2+h^2)(a^2+b^2+h^2)}.$$

Men merke nog op dat de som der eerste drie termen in het rechterlid gelijk is aan 0.

Verder is

$$\mathcal{J}_2 = -4b \int_0^a \int_0^b \frac{xdxdy}{(x^2+y^2+h^2)^3} = b \int_0^b dy \left(\frac{1}{(x^2+y^2+h^2)^2} \right) \Big|_0^a = \\ = -b \int_0^b dy \left(\frac{1}{(y^2+h^2)^2} - \frac{1}{(a^2+y^2+h^2)^2} \right) = \\ = -\frac{1}{2h^2} \frac{b^2}{b^2+h^2} - \frac{b}{2h^3} \operatorname{tg} \frac{b}{h} + \frac{1}{2(h^2+a^2)} \frac{b^2}{a^2+b^2+h^2} + \frac{b}{2(h^2+a^2)^{3/2}} \operatorname{tg} \frac{b}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Evenzo is

$$\mathcal{J}_3 = -4a \int_0^a \int_0^b \frac{ydydx}{(x^2+y^2+h^2)^3} = \frac{1}{2h^2} \frac{a^2}{a^2+h^2} - \frac{a}{2h^3} \operatorname{tg} \frac{a}{h} + \frac{1}{2(h^2+b^2)} \frac{a^2}{a^2+b^2+h^2} + \\ + \frac{a}{2(h^2+b^2)^{3/2}} \operatorname{tg} \frac{a}{\sqrt{b^2+h^2}},$$

en tenslotte is

$$\mathcal{J}_4 = 4 \int_0^a \int_0^b \frac{xydxdy}{(x^2+y^2+h^2)^3} = \int_0^b \frac{y dy}{(y^2+h^2)^2} - \int_0^b \frac{y dy}{a^2+h^2+y^2} = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2+b^2+h^2} - \frac{1}{a^2+h^2} - \frac{1}{b^2+h^2} + \frac{1}{h^2} \right).$$

Na optelling vindt men tenslotte voor de gevraagde integraal

$$\frac{b(2a^2+h^2)}{h^4\sqrt{a^2+h^2}} \operatorname{tg} \frac{b}{\sqrt{a^2+h^2}} + \frac{a(2b^2+h^2)}{2h^4\sqrt{b^2+h^2}} \operatorname{tg} \frac{a}{\sqrt{b^2+h^2}} - \frac{a}{2h^3} \operatorname{tg} \frac{a}{h} - \frac{b}{2h^3} \operatorname{tg} \frac{b}{h}.$$

+++++